

ALGEBRA – BLATT 1

1. BEISPIELE VON GRUPPEN

Aufgabe 1. Sei $G = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}^+\}$.

- Zeigen Sie, dass G unter komplexer Multiplikation eine Gruppe bildet (die Gruppe der *Einheitswurzeln* in \mathbb{C}).
- Zeigen Sie, dass G unter Addition keine Gruppe bildet.

Aufgabe 2. Sei $G = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

- G unter Addition eine Gruppe bildet.
- $G \setminus \{0\}$ unter Multiplikation eine Gruppe bildet. Tipp zum Auffinden von Inversen: Nenner “rationalisieren”.

2. ORDNUNGEN VON ELEMENTEN

Aufgabe 3. Finden Sie die Ordnungen von $\bar{1}$, $\overline{-1}$, $\bar{5}$, $\bar{7}$, $\overline{-7}$, und $\overline{13}$ in $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe und $x \in G$. Zeigen Sie, dass

- $|x| = 1$ oder $|x| = 2$ genau dann wenn $x^2 = 1$
- x und x^{-1} haben die gleiche Ordnung.
- Falls $|x|$ ungerade ist, so gilt $x = (x^2)^k$ für ein $k \geq 1$.

Aufgabe 5. Finden Sie eine unendliche Gruppe, in der jedes Element endliche Ordnung hat.

3. DIEDERGRUPPEN

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass die Diedergruppe $D_{2n} = \langle r, s \mid r^n = s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$ sich auch als $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^n = 1 \rangle$ präsentieren lässt. Sie können wie folgt vorgehen:

- Finden sie geeignete a, b in ihrer Darstellung mit r und s .
- Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellungen, dass die Relationen für a, b aus den Relationen für r, s folgen und umgekehrt.