ALGEBRA – BLATT 2

1. Die symmetrische Gruppe

Aufgabe 1.
- Sei σ der der 12-Zykel (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12). Für welche positiven i ist σ^i wieder ein 12-Zykel?
- Sei τ der 8-Zykel (1 2 3 4 5 6 7 8). Für welche positiven i ist τ^i wieder ein 8-Zykel?

Aufgabe 2. Finden Sie (nach evtl. weiteren Experimenten wie in Aufgabe 1) eine allgemeine Vermutung, für welche i, die Potenzen des m-Zykels $(1\ 2\ \cdots\ m)$ wieder m-Zykel sind und beweisen Sie diese.

2. Homomorphismen

Aufgabe 3. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass für alle $x \in G$ gilt $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. Ist φ sogar ein Isomorphismus so gilt
- $|\varphi(x)| = |x|$
- G ist abelsch genau wenn H abelsch ist.

Aufgabe 4. Untersuchen Sie, ob die Voraussetzung "Isomorphismus" in den letzten zwei Aussagen in Aufgabe 3 abgeschwächt werden kann.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Gruppen $(R^*, \cdot)$ und $(C^*, \cdot)$ nicht isomorph sind.

3. Gruppenwirkungen

Aufgabe 6. Sei A eine nichtleere Menge und k eine positive Zahl mit $k < |A|$. Die symmetrische Gruppe S_A wirkt auf der Menge $\mathcal{B} = \{B \subset A : |B| = k\}$ durch $\sigma \cdot \{a_1, \ldots, a_k\} = \{\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k)\}$.
- Zeigen Sie, dass dies eine Gruppenwirkung ist.
- Beschreiben Sie explizit, wie die Elemente (1 2) und (1 2 3) auf den 2-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$ wirken.