ALGEBRA – BLATT 4

1. Quotientengruppen

Aufgabe 1. Sei A eine abelsche Gruppe und $B \leq A$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass A/B abelsch ist. Gilt die Umkehrung; oder gibt es eine nicht-abelsche Gruppe A mit einer (nicht-trivialen, echten) normalen Untergruppe $B \trianglelefteq A$ so dass A/B abelsch?

Aufgabe 2. Sei $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto |x|$ die Betragsabbildung. Ist ϕ ein Homomorphismus? Beschreiben Sie die Fasern von ϕ und den Quotienten.

Aufgabe 3. Sei $G = D_{16} = \langle r, s | r^8 = s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung 16. Betrachten Sie den Quotienten $\overline{G} = G/\langle r^4 \rangle$ von G modulo seinem Zentrum.

1. Zeigen Sie, dass $|\overline{G}| = 8$.
2. Stellen Sie alle Elemente von $\overline{G}$ als $\overline{s}^a\overline{r}^b$ mit ganzen Zahlen a, b dar.
3. Bestimmen Sie die Ordnungen aller Elemente von $\overline{G}$.
4. Bestimmen Sie die folgenden Elemente ihrer kanonischen Darstellung $\overline{s}^a\overline{r}^b$:
$$\overline{rs}, \quad \overline{sr^{-2}s}, \quad \overline{s^{-1}rs^{-1}r}.$$
5. Sei $\overline{H} = \langle \overline{s}, \overline{r}^2 \rangle \leq \overline{G}$. Zeigen Sie, dass $\overline{H}$ normal und isomorph zur Kleinschen Vierergruppe $Z_2 \times Z_2$ ist.
6. Bestimmen sie den Isomorphietyp des kompletten Urbilds von $\overline{H}$ in G.
7. Finden Sie dass Zentrum von $\overline{G}$ und den Isomorphietyp von $\overline{G}/Z(\overline{G})$.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe. Angenommen $G/Z(G)$ ist zyklisch ist mit Erzeuger $xZ(G)$. Zeigen Sie, dass jedes Element von G von der Form $x^a z$ mit $z \in Z(G)$ ist. Schließen Sie, dass in diesem Fall G abelsch ist. Nutzen Sie dies um zu zeigen, dass eine Gruppe der Ordnung pq mit p, q prim entweder abelsch ist, oder triviales Zentrum hat.

Aufgabe 5. Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die *Kommutatoruntergruppe*
$$N = \langle x^{-1}y^{-1}xy : x, y \in G \rangle$$
ein Normalteiler ist. Zeigen Sie, dass G/N abelsch ist.

Aufgabe 6. Sei $H \leq G$ eine Untergruppe einer Gruppe G und $g \in G$ beliebig. Zeigen Sie, dass gHg^{-1} eine Untergruppe von der gleichen Ordnung wie H ist. Beweisen Sie, dass falls es für eine positive ganze Zahl n nur eine Untergruppe der Ordnung n gibt, diese ein Normalteiler ist.