ALGEBRA – BLATT 5

1. Die alternierende Gruppe

Aufgabe 1. Studieren sie die Untergruppen von A_4. Welche Ordnungen und Indizes können Sie finden? Zeigen Sie, dass die einzige Untergruppe der Ordnung 4 ein Normalteiler ist und bestimmen Sie ihren Isomorphietyp.

Nebenbemerkung: Für $n \geq 5$ ist die A_n *einfach*, hat also keine nicht-trivialen Normalteiler. Dieser Fakt spielt in der Auslösbarkeit von Polynomgleichungen durch Lösungsformeln eine wichtige Rolle: Lösungsformeln gibt es für Polynome bis zum Grad 4.

2. Ringe

Aufgabe 2. Sei R der Ring aller Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Einheiten und Nullteiler von R. Sei S der Ring aller *stetigen* Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es im Gegensatz zu R in S Elemente gibt, die weder Einheiten noch Nullteiler sind.

Aufgabe 3. Ein Element r eines Rings R heißt *nilpotent* falls $r^m = 0$ für ein $m > 0$.

- Zeigen Sie, dass falls $n = a^k b$, dann ist $\overline{ab}$ nilpotent im Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Sei X eine nichtleere Menge und K ein Körper. Zeigen Sie, dass der Ring der Funktionen $X \to K$ außer $0 : (x \mapsto 0)$ keine nilpotenten Elemente besitzt.

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie, dass ein Polynom $p = a_n x^n + \cdots + a_0$ in $R[x]$ ein Nullteiler ist, genau wenn ein $b \in R$ existiert mit $bp = 0$. Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, p ist Nullteiler und $q = b_m x^m + \cdots + b_0$ hat minimalen Grad hat unter allen Elementen von $R[x]$ die $pq = 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass $q' = a_n q$ ebenfalls $pq' = 0$ erfüllt, aber Grad echt kleiner m hat.

Aufgabe 5. Sei $M_2(\mathbb{Z})$ der Ring der (2×2)-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}$. Welche der folgenden Abbildungen ((1,1)-Eintrag, Spur, Determinante) sind Homomorphismen $M_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to a \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to a + d \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to ad - cb$$

Aufgabe 6. Beweisen Sie Proposition 7.5 aus der Vorlesung: Seien R, S Ringe und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

- Das Bild $\mathrm{im}(\varphi) = \varphi(R) \subset S$ ist ein Unterring von S.
- Der Kern $\ker(\varphi) = \{r \in R : \varphi(r) = 0\}$ ist ein Unterring von R mit folgender Zusatzeigenschaft: Für alle $\alpha \in \ker(\varphi)$ und $r \in R$ ist $\alpha r \in \ker(\varphi)$.