ALGEBRA – BLATT 6

1. Ideale in Ringen

Aufgabe 1. Sei $I \subset R$ ein Ideal und $S \subset R$ ein Unterring. Zeigen Sie, dass $I \cap S$ ein Ideal in S ist. Zeigen Sie, dass nicht jedes Ideal eines Unterrings S als $I \cap S$ für ein Ideal $I \subset R$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 2. Klassifizieren Sie die Ideale von $\mathbb{Z}$ nach den Eigenschaften *Primideal*, *maximales Ideal*, *Hauptideal*.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Ideal $(x - 17) \subset \mathbb{Q}[x]$ maximal ist. Ist $(x - 17)$ maximal in $\mathbb{Z}[x]$?

Aufgabe 4. Sei R ein (nicht-notwendigerweise kommutativer) Ring und $M \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie: Wenn R/M ein Körper ist, dann ist M maximales Ideal.
N.b. Die Umkehrung gilt hier nicht mehr. Der Quotient R/M modulo einem maximalen Ideal ist nur noch ein *einfacher Ring*, ein Ring ohne zweiseitige Ideale außer (0) und R.

Aufgabe 5. Sei $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ und $S = R/(x^2 + x + 1)$.

1. Bestimmen Sie alle Elemente von S (Hinweis: Es sind vier).
2. Beschreiben Sie die additive Gruppe des Rings S.
3. Zeigen Sie, dass die multiplikative Gruppe S^* zyklisch von Ordnung 3 ist.
4. Schließen Sie, dass S ein Körper der Ordnung vier ist.

Aufgabe 6. Sei R ein kommutativer Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Das *Radikal von I* ist

$$\sqrt{I} = \{r \in R : r^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}.\}$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{I}$ ein Ideal von R ist, welches I enthält. Ein Ideal $I \subset R$ ist *radikales Ideal* falls $\sqrt{I} = I$. Zeigen Sie, dass jedes Primideal radikal ist.

(Bonusaufgabe auf Seite 2)

Aufgabe 7. Bonusaufgabe. Die folgende Aufgabe gibt eine Idee, wie geometrische Ideen in der Algebra umgesetzt werden können. Ziel ist es, zu motivieren, wie für einen gegebenen Raum X, eine *Kompaktifizierung* konstruiert werden kann, d.h. einen Raum $\overline{X} \supset X$ der kompakt ist und möglichst eng an X anliegt. Bereit? Dann geht's jetzt los mit dem bereits kompakten topologischen Raum $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

Sei R der Ring der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ und für $c \in [0,1]$ sei

$$M_c = \{f \in R : f(c) = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass M_c ein maximales Ideal ist, und dass jedes maximale Ideal von R von dieser Form ist.
2. Zeigen Sie, dass falls $b \neq c$ verschiedene Punkte in $[0,1]$ sind, dann ist $M_b \neq M_c$.
3. Zeigen Sie, dass M_c nicht endlich erzeugt werden kann. Insbesondere ist also $M_c \neq (x - c)$.

Die Bijektion zwischen Punkten in $[0,1]$ und maximalen Idealen von R dient als Motivation für die folgende Konstruktion. Sei X ein vollständig regulärer (=gutartiger) topologischer Raum und R der Ring der beschränkten stetigen Funktionen $X \to \mathbb{R}$. Für jedes $c \in X$ sei M_c das Ideal aller solcher Funktionen die an c verschwinden. Die Abbildung $c \mapsto M_c$ ist noch eine Injektion von X in die Menge der maximalen Ideale von R. Als Kompaktifizierung dient nun einfach $\overline{X}$, die Menge der maximalen Ideale von R. Diese Menge kann mit einer Topologie ausgestattet werden, so dass das Bild von X in $\overline{X}$ ein Unterraum ist, der die ursprüngliche Topologie von X besitzt. Man zeigt, dass $\overline{X}$ ein kompakter topologischer Raum ist, die sogenannte *Stone–Čech Kompaktifizierung von X*. Sie hat viele nützliche Eigenschaften. Unter anderem ist sie der größte kompakte Hausdorffraum (=noch eine nützliche Trennungseigenschaft in topologischen Räumen) der von X erzeugt wird. Dies wird ausgedrückt durch die folgende *universelle Eigenschaft*. Sei $i : X \to \overline{X}$ die obige Einbettung. Wann immer man eine stetige Abbildung $f : X \to K$ in einen kompakten Hausdorffraum K findet, so gibt es eine eindeutige stetige Abbildung $\overline{f} : \overline{X} \to K$ so dass $f = \overline{f} \circ i$. Man könnte salopp sagen, jedes solche f ist durch i teilbar. In Wirklichkeit sagt man, $f : X \to K$ *liftet zu* $\overline{f} : \overline{X} \to K$.