ALGEBRA – BLATT 7

1. Irreduzible Polynome

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für jedes der folgenden Polynome die Faktorisierungen in irreduzible Polynome im jeweils angegebenen Ring:

- $x^2 + x + 1$ in $\mathbb{F}_2[x]$
- $x^3 + x + 1$ in $\mathbb{F}_3[x]$
- $x^4 + 1$ in $\mathbb{F}_5[x]$
- $x^4 + 10x^2 + 1$ in $\mathbb{Z}[x]$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ sind

- $x^4 - 4x^3 + 6$,
- $x^6 + 30x^5 - 15x^3 + 6x - 120$,
- $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$,
- $\frac{(x+2)^p - 2^p}{x}$, für eine ungerade Primzahl p.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $K_1 = \mathbb{F}_{11}[x]/(x^2 + 1)$ und $K_2 = \mathbb{F}_{11}[y]/(y^2 + 2y + 2)$ Körper der Ordnung 121 sind. Zeigen Sie, dass $p(\overline{x}) \mapsto p(\overline{y} + 1)$ einen Homomorphismus $K_1 \to K_2$ wohldefiniert. Schließen Sie, dass $K_1 \cong K_2$. (In der Vorlesung wurde behauptet, dass alle Körper einer fixierten endlichen Ordnung isomorph sind.)

2. Algebraische Körpererweiterungen

Aufgabe 4. Beschreiben Sie den Körper $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1)$ möglichst genau. Geben Sie eine explizite Form für seine Elemente an, und beschreiben Sie, wie Addition, Multiplikation und Inversion in dieser Darstellung der Elemente aussehen. Was ist die Kardinalität des Körpers? Finden Sie ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Q}(i)[x]$.

Aufgabe 5. Finden Sie zwei verschiedene Isomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Aufgabe 6. Formulieren Sie einen vollständigen Beweis von Satz 13.8.
Satz. Sei $\varphi : F \to F'$ ein Körperisomorphismus, $p \in F[x]$ irreduzibel und $p' \in F'[x]$ das Bild von p unter der Erweiterung von φ auf $F[x] \to F'[x]$ durch Wirkung auf die Koeffizienten. Sei weiter α eine Wurzel von p in einem beliebigen Erweiterungskörper von F und β eine Wurzel von p' in einem beliebigen Erweiterungskörper von F'. Dann existiert ein Körperisomorphismus $\sigma : F(\alpha) \to F'(\beta)$ mit $\sigma_{|F} = \varphi$ und $\sigma(\alpha) = \beta$.