ALGEBRA 2 – BLATT 1

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e und der Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ gilt: $g^2 = e$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $S_n := \{\sigma : [n] \to [n] : \sigma \text{ bijektiv}\}$. Zeigen Sie:

1. S_n mit Komposition als Verknüpfung ist eine Gruppe.
2. Zeigen Sie: $S_n = \langle \big(i \quad i+1\big) : 1 \leq i < n \rangle$.

Aufgabe 3. Es seien G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G mit $(G : H) = 2$. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe.

1. Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist.
2. Zeigen Sie: Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

Aufgabe 5. Sei G eine Gruppe. Jedem $g \in G$ wird ein Automorphismus $\varphi_g : G \to G$, $a \mapsto gag^{-1}$ zugeordnet. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto \varphi_g$ ein Homomorphismus ist.