ALGEBRA II – BLATT 2

Aufgabe 1. G operiere auf M. Für jedes $g \in G$ sei $\sigma_g \in S_M$ durch $\sigma_g(m) = g \cdot m$ und $\phi : G \to S_M$, $g \mapsto \sigma_g$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass ϕ ein Homomorphismus vom Gruppen ist.
2. Zeigen Sie, dass ϕ genau dann injektiv ist, wenn die Gruppenoperation treu ist.
3. Zeigen Sie, dass die Gruppenoperationen von G auf M in Bijektion zu den Homomorphismen $G \to S_M$ stehen.

Aufgabe 2. Sei p eine Primzahl.

1. Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und G eine Gruppe mit $|G| = p^k$. Zeigen Sie, dass $Z(G) \neq \{e\}$.
2. Sei G eine Gruppe mit $|G| = p^2$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 3. Sei G eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass G genau dann einfach ist, wenn $G \cong \mathbb{Z}_p$ mit p prim.

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe, p prim und $k \in \mathbb{N}$, sodass p^k ein Teiler von $|G|$ ist. Zeigen Sie, dass dann eine Untergruppe $H \leq G$ mit $|H| = p^k$ existiert.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle: p ist Teiler von $|Z(G)|$ und p ist kein Teiler von $|Z(G)|$.