ALGEBRA – BLATT 2

Abgabe der Ausarbeitungen bitte bis 06.05.2021 09:00 Uhr auf Moodle.
Eine eigenständige Abgabe pro Person.

1. Die symmetrische Gruppe

Aufgabe 1.

- Sei σ der der 12-Zykel $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$. Für welche positiven i ist σ^i wieder ein 12-Zykel?
- Sei τ der 8-Zykel $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)$. Für welche positiven i ist τ^i wieder ein 8-Zykel?

Aufgabe 2. Finden Sie (nach evtl. weiteren Experimenten wie in Aufgabe 1) eine allgemeine Vermutung, für welche i, die Potenzen des m-Zykels $(1\ 2\ \cdots\ m)$ wieder m-Zykel sind und beweisen Sie diese.

2. Homomorphismen

Aufgabe 3. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass für alle $x \in G$ gilt $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. Ist φ sogar ein Isomorphismus so gilt

- $|\varphi(x)| = |x|$
- G ist abelsch genau wenn H abelsch ist.

Aufgabe 4. Untersuchen Sie, ob die Gruppen $((\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^*, \cdot)$ und $((\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}), +)$ isomorph sind. (Damit ist natürlich gemeint: geben Sie die richtige Antwort und einen Beweis!)

3. Gruppenwirkungen

Aufgabe 5. Sei A eine nichtleere Menge und k eine positive Zahl mit $k < |A|$. Die symmetrische Gruppe S_A wirkt auf der Menge $\mathcal{B} = \{B \subset A : |B| = k\}$ durch $\sigma \cdot \{a_1, \ldots, a_k\} = \{\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k)\}$.

- Zeigen Sie, dass dies eine Gruppenwirkung ist.
- Beschreiben Sie explizit, wie die Elemente $(1\ 2)$ und $(1\ 2\ 3)$ auf den 2-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$ wirken.

Aufgabe 6.

1. Finden Sie alle Untergruppen der Permutationsgruppe S_3 und stellen Sie diese in einem Hassediagramm (also partiell geordnet) bezüglich der Mengeninklusion "$\subset$" dar.

2. Die S_3 wirkt per Konjugation auf der Menge der Untergruppen (Sie müssen diese Aussage nicht beweisen. Sie gilt, da die Konjugation ein Automorphismus der Gruppe ist und damit Untergruppen auf Untergruppen abbildet). Dabei wird eine Untergruppe $G \leq S_3$ auf $(12)G(12)^{-1} = \{(12)g(12)^{-1} : g \in G\}$ abgebildet. Geben Sie an, wie diese Konjugation die Untergruppen permutiert.