ALGEBRA – BLATT 4

Abgabe der Ausarbeitungen bitte bis 03.06.2021 09:00 Uhr auf Moodle.
Eine eigenständige Abgabe pro Person.

1. Normalteiler

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe und $P, Q \trianglelefteq G$ Normalteiler mit $P \cap Q = \{1\}$. Zeigen Sie, dass dann P und Q kommutieren, d.h. für alle $x \in P$ und $y \in Q$ gilt $xy = yx$.

Aufgabe 2. (zählt als zwei Aufgaben) Sei $G = D_{16} = \langle r, s | r^8 = s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung 16. Betrachten Sie den Quotienten $\overline{G} = G/\langle r^4 \rangle$ von G modulo dem Zentrum.

1. Zeigen Sie, dass $|\overline{G}| = 8$.
2. Stellen Sie alle Elemente von $\overline{G}$ als $\overline{s}^a \overline{r}^b$ mit ganzen Zahlen a, b dar.
3. Bestimmen Sie die Ordnungen aller Elemente von $\overline{G}$.
4. Bestimmen Sie die folgenden Elemente ihrer kanonischen Darstellung $\overline{s}^a \overline{r}^b$:

$$\overline{rs}, \quad \overline{sr^{-2}s}, \quad \overline{s^{-1}rs^{-1}r}.$$

5. Sei $\overline{H} = \langle \overline{s}, \overline{r}^2 \rangle \leq \overline{G}$. Zeigen Sie, dass $\overline{H}$ normal und isomorph zur Kleinschen Vierergruppe $Z_2 \times Z_2$ ist.
6. Bestimmen sie den Isomorphietyp des kompletten Urbilds von $\overline{H}$ in G.
7. Finden Sie dass Zentrum von $\overline{G}$ und den Isomorphietyp von $\overline{G}/Z(\overline{G})$.

2. Die alternierende Gruppe

Aufgabe 3. Studieren sie die Untergruppen von A_4. Welche Ordnungen und Indizes können Sie finden? Zeigen Sie, dass die einzige Untergruppe der Ordnung 4 ein Normalteiler ist und bestimmen Sie ihren Isomorphietyp.

Nebenbemerkung: Für $n \geq 5$ ist die A_n *einfach*, hat also keine nicht-trivialen Normalteiler. Dieser Fakt spielt in der Auslösbarkeit von Polynomgleichungen durch Lösungsformeln eine wichtige Rolle: Lösungsformeln gibt es für Polynome bis zum Grad 4.

3. Ringe

Aufgabe 4. Sei R der Ring aller Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Einheiten und Nullteiler von R. Sei S der Ring aller *stetigen* Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es im Gegensatz zu R in S Elemente gibt, die weder Einheiten noch Nullteiler sind.

Aufgabe 5. Ein Element r eines Rings R heißt *nilpotent* falls $r^m = 0$ für ein $m > 0$.

- Zeigen Sie, dass falls $n = a^k b$, dann ist $\overline{ab}$ nilpotent im Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Sei X eine nichtleere Menge und K ein Körper. Zeigen Sie, dass der Ring der Funktionen $X \to K$ außer $0\colon (x \mapsto 0)$ keine nilpotenten Elemente besitzt.