ALGEBRA – BLATT 5

Abgabe der Ausarbeitungen bitte bis 17.06.2021 09:00 Uhr auf Moodle. Eine eigenständige Abgabe pro Person.

1. Ringe

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass ein Polynom $p = a_n x^n + \cdots + a_0$ in $R[x]$ genau dann ein Nullteiler ist, wenn ein $b \in R$ existiert mit $bp = 0$. Hinweis: Ist p ein Nullteiler, dann kann man unter allen $q = b_m x^m + \cdots + b_0$ mit $pq = 0$ eines mit minimalen Grad auswählen. Zeigen Sie, dass dann $q' = a_n q$ ebenfalls $pq' = 0$ erfüllt, aber Grad echt kleiner m hat.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ der Ring der (2×2)-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}$. Welche der folgenden Abbildungen (a) $(1,1)$-Eintrag, b) Spur, c) Determinante) sind Homomorphismen $\mathbb{Z}^{2\times 2} \to \mathbb{Z}$?

$$\text{a)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + d \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - cb$$

2. Ideale in Ringen

Aufgabe 3. Sei $I \subset R$ ein Ideal und $S \subset R$ ein Teilring. Zeigen Sie, dass $I \cap S$ ein Ideal in S ist. Zeigen Sie, dass nicht jedes Ideal eines Teilrings S als $I \cap S$ für ein Ideal $I \subset R$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 4. Klassifizieren Sie die Ideale von $\mathbb{Z}$ nach den Eigenschaften *Primideal*, *maximales Ideal*, *Hauptideal*.

Aufgabe 5. Sei $R = \mathbb{C}^{3\times 3}$ der Ring der komplexen 3×3-Matrizen. Bestimmen Sie alle (zweiseitigen) Ideale von R. Tipp: Bestimmen Sie zunächst das von einer beliebigen Matrix erzeugte Hauptideal.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass das Ideal $\langle x - 17 \rangle \subset \mathbb{Q}[x]$ maximal ist. Ist $\langle x - 17 \rangle$ maximal in $\mathbb{Z}[x]$?