ALGEBRA – BLATT 6

Abgabe der Ausarbeitungen bitte bis 01.07.2021 09:00 Uhr auf Moodle.
Eine eigenständige Abgabe pro Person.

1. Radikale Ideale

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Das *Radikal von I* ist

$$\sqrt{I} = \{r \in R : r^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}.\}$$

1. Zeigen Sie, dass $\sqrt{I}$ ein Ideal von R ist, welches I enthält.
2. Ein Ideal $I \subset R$ ist *radikales Ideal* falls $\sqrt{I} = I$. Zeigen Sie, dass jedes Primideal radikal ist.
3. Sei n eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie das Radikal von $\langle n \rangle \subset \mathbb{Z}$.

2. Irreduzible Polynome

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ sind

- $x^4 - 4x^3 + 6$,
- $x^6 + 30x^5 - 15x^3 + 6x - 120$,
- $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$,
- $\frac{(x+2)^p - 2^p}{x}$, für eine ungerade Primzahl p.

3. Körper

Aufgabe 3. Sei $R = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$ und $S = R/(x^2 + x + 1)$.

1. Bestimmen Sie alle Elemente von S (Hinweis: Es sind nur endlich viele).
2. Beschreiben Sie die additive Gruppe des Rings S (bis auf Isomorphie).
3. Zeigen Sie, dass die multiplikative Gruppe S^* zyklisch von Ordnung 3 ist.
4. Schließen Sie, dass S ein Körper ist.

Aufgabe 4. Beschreiben Sie den Körper $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1)$ möglichst genau. Geben Sie eine explizite Form für seine Elemente an, und beschreiben Sie, wie Addition, Multiplikation und Inversion in dieser Darstellung der Elemente aussehen. Was ist die Kardinalität des Körpers? Finden Sie ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Q}(i)[x]$.

Aufgabe 5. Finden Sie zwei verschiedene Isomorphismen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Aufgabe 6. Sei K ein Teilkörper eines Körpers L und $p \in K[x]$ ein Polynom mit Koeffizienten im "kleinen" Körper K. Sei $\sigma\colon L \to L$ ein Automorphismus von L der K punktweise fixiert, d.h. $\sigma(\alpha) = \alpha$ für alle $\alpha \in K$. Sei nun $\beta \in L$ eine Wurzel von p. Zeigen Sie, dass $\sigma(\beta)$ auch eine Wurzel von p ist.