KOMMUTATIVE ALGEBRA – BLATT 2

1. Projektive Geometrie

Aufgabe 1. Sei $\Bbbk$ ein Körper. Der *r-dimensionale projektive Raum* $\mathbb{P}^r(\Bbbk)$ ist die Menge aller 1-diml. Unterräume eines $(r+1)$-dimensionalen $\Bbbk$-Vektorraums. Ein solcher Unterraum kann durch *homogene Koordinaten* $0 \neq (a_0, a_1, \ldots, a_r)$ angegeben werden, wobei für jedes $0 \neq \lambda \in \Bbbk$, $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ und $(\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_r)$ den gleichen Punkt in $\mathbb{P}^r(\Bbbk)$ definieren. Nichtkonstante polynomielle Funktionen auf $\mathbb{P}^r(\Bbbk)$ sind nicht wohldefiniert. Ist jedoch f ein homogenes Polynom, dann ist $f(a) = 0$ wohldefiniert (warum?), d.h. für ein homogenes Ideal $I \subset \Bbbk[x_0, \ldots, x_r]$ kann man eine *projektive algebraische Menge* definieren als

$$Z(I) = \{a \in \mathbb{P}^r(\Bbbk) : f(a) = 0 \text{ für alle homogenen } f \in I\}.$$

Überzeugen Sie sich, dass in diesem Fall $\Bbbk[x_0, \ldots, x_r]/I$ ein gradierter Ring ist. Er heißt der *homogene Koordinatenring von $Z(I)$*. Falls $\Bbbk$ algebraisch abgeschlossen, dann gibt es einen Nullstellensatz der radikale homogene Ideale mit projektiven algebraischen Mengen identifiziert. Ein radikales homogenes Ideal muss ausgenommen werden; welches?

Finden Sie eine Überdeckung von $\mathbb{P}^r$ durch affine algebraische Untermengen. Es gibt eine Überdeckung in der gilt $\mathbb{P}^r = \mathbb{A}^r \cup H$ mit H isomorph zu $\mathbb{P}^{r-1}$. Man nennt H die *Hyperebene im Unendlichen*. In diesem Sinne ist $\mathbb{P}^r(\Bbbk)$ eine Kompaktifizierung von $\mathbb{A}^r$.

2. Lokalisierung

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die allgemeine lineare Gruppe $GL_n(\Bbbk)$ eine algebraische Menge ist. Beschreiben Sie den Koordinatenring.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring. Ein idealtheoretisches Analogon von Lokalisierung sind *Colonideale* (auch etwas unglücklich *Idealquotienten* genannt). Sei $I \subset R$ ein Ideal und $f \in R$. Das Colonideal ist

$$I : f = \{g \in R : fg \in I\}$$

In einem Noetherschen Ring stabilisiert die Kette $I \subset I : f \subset (I : f) : f \subset \ldots$ und das Grenzobjekt wird mit $I : f^\infty$ bezeichnet. Sei $U \subset R$ multiplikativ abgeschlossen. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften von Colonidealen

- f ist ein Nichtnullteiler in R/I genau dann wenn $I : f = I$.
- Ideale in $R[U^{-1}]$ korrespondieren 1:1 mit Idealen $I \subset R$ so dass $I : f = I$ für alle $f \in U$, so dass Summen, Schnitte, und die Primeigenschaft erhalten bleiben.
- Für jedes Ideal $J \subset R$ gilt $R \cap JR[U^{-1}] = \sum_{f \in U} (J : f^\infty)$.

- Die Ideale I so dass $I : f = I$ für alle $f \in U$ sind genau das Bild der Abbildung $J \mapsto R \cap JR[U^{-1}]$.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $Q_1, \ldots, Q_n$ paarweise ko-prime Ideale, d.h. $(Q_i, Q_j) = R$ für $i \neq j$. Der chinesische Restsatz lässt sich verallgemeinert formulieren als ein Isomorphismus $R/(\cap_i Q_i) \cong \prod_i R/Q_i$. Beweisen Sie den Isomorphismus wie folgt:

1. Sei $\phi : R \to \prod_i R/Q_i$ gegeben durch die n Projektionen $R \to R/Q_i$. Zeigen Sie $\ker(\phi) = \cap_i Q_i$.
2. Sei $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal. Zeigen Sie, dass die ko-prim Hypothese impliziert, dass maximal ein Q_i in $\mathfrak{m}$ enthalten ist. Nutzen Sie das Lokalisierung rechts-exakt ist (oder Korollar 2.9) um zu zeigen, dass ϕ surjektiv ist.

Aufgabe 5. Zeigen Sie die *universelle Eigenschaft* der Lokalisierung: Sei U multiplikativ abgeschlossene Untermenge eines Rings R und S eine beliebige R-Algebra, in der die Bilder von U invertierbar sind. Dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\psi : R[U^{-1}] \to S$ so dass das folgende Diagramm kommutiert, d.h. $\phi = \psi \circ \iota$.

$$\begin{tikzcd}
 & R[U^{-1}] \arrow[dd, "\exists!\psi"] \\
R \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\phi"'] & \\
 & S
\end{tikzcd}$$

Zeigen sie dann, dass die universelle Eigenschaft $R[U^{-1}]$ charakterisiert, d.h., wenn $R \to R^*$ eine beliebige Algebra ist, die ebenfalls die universelle Eigenschaft hat, dann existiert ein (eindeutiger) Isomorphismus $R[U^{-1}] \to R^*$.

3. Hom und Tensor

Aufgabe 6. Beschreiben Sie die folgenden Objekte so genau wie möglich.

- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Z}/(m))$
- $\mathrm{Hom}_{k[x]}(k[x]/(x^n), k[x]/(x^m))$
- $k[x] \otimes_k k[x]$ (als Algebra).