KOMMUTATIVE ALGEBRA – BLATT 3

1. Exakte Folgen

Aufgabe 1. Sei $R = \Bbbk[x, y]$ und $\mathfrak{m} = (x, y) \subset \Bbbk[x, y]$. Berechnen Sie eine *freie Auflösung* des R-Moduls $\Bbbk \cong R/\mathfrak{m}$, d.h. eine exakte Folge

$$0 \to R^{\beta_2} \to R^{\beta_1} \to R^{\beta_0} \to \Bbbk \to 0$$

Die Länge der Folge ist durch Hilberts Syzygiensatz wie oben beschränkt. Es bleibt also nur die β_i sowie geeignete Abbildungen zu bestimmen, so dass die Folge exakt wird. Da die R^{β_i} freie Moduln sind, lassen sich die Abbildungen durch Matrizen mit Einträgen in R angeben.

2. Assoziierte Primideale

Aufgabe 2. Sei $\Bbbk$ ein Körper. Zeigen Sie, dass die Menge der Matrizen in $\Bbbk^{m\times n}$ vom Rang höchstens eins eine irreduzible algebraische Menge ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie dass ein Primideal $P \subset R$ genau dann zu eiem Ideal $I \subset R$ assoziiert ist, wenn gilt $P = (I : x)$ für ein $x \in R$.

Aufgabe 4. Sei $Q \subset R$ ein Ideal dessen Radikal $\mathrm{rad}(Q) = \mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist. Zeigen Sie dass Q primär ist.

Aufgabe 5. Identifizieren sie die assoziierten Primideale einer endlich erzeugten Abelschen Gruppe mit Hilfe des Struktursatzes über solche Gruppen.