KOMMUTATIVE ALGEBRA – BLATT 4

1. Vermeidungslemma

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $(x, y) \subset \mathbb{C}[x, y]$ in einer unendlichen Vereinigung von Primidealen enthalten ist, so dass es in keinem einzelnen der Primideale enthalten ist.

2. Monom- und Binomideale

Aufgabe 2. Sei $\Bbbk$ ein beliebiger Körper. Ein *Monom* ist ein Polynom mit höchstens einem Term. Ein *Binom* ist ein Polynom mit höchstens 2 Termen. Ein *Monomideal* bzw. *Binomideal* in $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ ist ein Ideal welches durch Monome bzw. Binome erzeugt werden kann.

- Charakterisieren Sie monomische Primideale, d.h. finden Sie ein korrektes Statement der Art *Ein Monomideal ist prim genau dann wenn ...* eine elementare Aussage über die Erzeuger gilt.
- Charakterisieren Sie irreduzible Monomideale
- Charakterisieren Sie primäre Monomideale.
- Geben Sie einen Algorithmus für irreduzible Zerlegung von Monomidealen an. (Hinweis: Was gilt für Erzeuger von Colonidealen $(I : m)$ mit I Monomideal und m Monom?)
- Zeigen Sie, dass ein assoziiertes Primideal eines Monomideals wieder ein Monomideal ist.

Finden Sie ein Beispiel eines Binomideals in $\Bbbk[x]$ mit einem nicht-binomischen assoziierten Primideal. Primärzerlegung von Binomidealen erlaubt trotzdem eine vereinfachte Theorie. Welche zusätzliche Annahme liegt nahe (und schließt das Gegenbeispiel aus)?

3. (Un)Eindeutigkeit der Primärzerlegung

Aufgabe 3. Sei $I \subset R$ ein Ideal in einem Noetherschen Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Setze:

$$H_I^0 := \{m \in M : I^n m = 0 \text{ für } n \text{ gross}\}$$

Zeigen Sie, dass H_I^0 ein Untermodul von M ist und dass $H_I^0(M) = H_J^0(M)$ falls $\mathrm{rad}(I) = \mathrm{rad}(J)$. Sei

$$A = \{P \in \mathrm{Ass} M : P \supset I\}$$

die Menge der assoziierten Primideale von M die über I liegen. Sei weiter $0 = \bigcap_i M_i$ eine Primärzerlegung von $0 \subset M$ mit M_i P_i-primär. Zeigen Sie, dass H_I^0 gleich dem

Schnitt der M_i ist, so dass $P_i \notin A$. Insbesondere ist dieser Schnitt also unabhängig von der gewählten Primärzerlegung. Gehen Sie wie folgt vor:

- Schreiben Sie $H_I^0(M) = (0 :_M I^\infty) = \bigcup_n (0 :_M I^n)$ wobei $(0 :_M I^n) := \{m \in M : I^n m = 0\}$.
- Setzen Sie für 0 die Primärzerlegung ein und verwenden Sie die Charakterisierung wann eine Potenz von P_i den Quotienten M/M_i annihiliert.

Verwenden Sie das Vermeidungslemma um zu zeigen, dass es ein $f \in I$ gibt, so dass $P \in A$ genau dann wenn $P \in \mathrm{Ass}(M)$ und $f \in P$. Für jedes solche f gilt:

$$H_I^0(M) = \ker(M \to M[f^{-1}]).$$

4. Zu viele Endlichkeitsbegriffe

Aufgabe 4. Sei R ein Ring, $R \to S$ eine R-Algebra, und M ein S-Modul (dann ist M auch ein R-Modul via $R \to S$). Sei S endlich über R (d.h. endlich erzeugt als R-Modul), und M ein endlich erzeugter S-Modul. Zeigen Sie, dass M ein endlich erzeugter R-Modul ist.