



Aufgaben 2

Aufgabe 2.1

Dividieren Sie (unter lexikographischer Termordnung mit $x > y$) das Polynom $x^2y + y^2x + y^2$ durch die Menge $\{y^2 - 1, xy - 1\}$.

Aufgabe 2.2

Das S in S-Paar steht für *Syzygie*. Was bedeutet dieses Wort?

Aufgabe 2.3

Auf der Macaulay2 Kommandozeile kann man sich mit `help "X"` Hilfe zum Thema X anzeigen lassen. Wenn alles richtig installiert ist, öffnet `viewHelp "X"` sogar die entsprechende Hilfeseite im Browser. Themen lassen sich oft auch noch weiter spezifizieren. So zeigt `help "ideal"` nur eine Liste von möglichen Aufrufen der Funktion `ideal` an, `help "ideal(List)"` hingegen wie aus einer Liste ein Ideal erzeugt wird.

Lesen sie die Macaulay2 Hilfe zu den Themen `MonomialOrder`, `eliminate`, `factor(RingElement)`.

Aufgabe 2.4

Bestimmen Sie (mit Hilfe von Macaulay2) alle Punkte der Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 an denen die Funktion

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2xyz - z^2$$

Extremwerte annimmt.

Aufgabe 2.5

- Das Implizitisierungsproblem kann auf Elimination zurückgeführt werden. Sei $X \subset \mathbb{k}^n$ gegeben als das Bild einer Parameterisierung

$$(t_1, \dots, t_m) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t_1, \dots, t_m) \\ \vdots \\ f_n(t_1, \dots, t_m) \end{pmatrix}, \quad (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{k}^m,$$

wobei f_i Polynome (allgemeiner: rationale Funktionen) sind. Wie kann mit Elimination die "kleinste" Varietät bestimmt werden die X enthält? (Ein vollständige Diskussion findet sich im Buch von Cox, Little, O'Shea.)

- Die *Momentenkurve* ist parametrisch gegeben durch

$$t \mapsto (t, t^2, \dots, t^n)$$

Finden Sie eine möglichst elegante implizite Beschreibung.