Monomial and binomial ideals

Thomas Kahle

Aufgaben 4

Aufgabe 4.1
Seien M und N beliebige R-Moduln. Die abelsche Gruppe der R-Modulhomomorphismen $M \to N$ wird mit $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ bezeichnet und ist wieder eine R-Modul via

$$(r\varphi)(m) := r\varphi(m) = \varphi(rm), \qquad \text{for } r \in R, m \in M, \phi \in \operatorname{Hom}_R(M, N).$$

Zeigen Sie

- $\operatorname{Hom}_R(R, N) = N$
- Hom ist *funktoriell* im folgenden Sinne: Falls $\alpha : M' \to M$ und $\beta : N \to N'$ (Achtung: Richtung!) Homomorphismen von R-Moduln sind, dann gibt es einen induzierten Homomorphismus

$$\operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}(M', N'), \quad \varphi \mapsto \beta\varphi\alpha.$$

Aufgabe 4.2
Sei $I \subset R$ ein Ideal und $f \in R$ beliebig. Zeigen Sie, dass

$$0 \to R/(I : f) \xrightarrow{\cdot f} R/I \to R/(I + f) \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz ist.

Aufgabe 4.3
Was macht folgender Macaulay2 Code?

```
printBetti = i -> (
   R := QQ[vars(1..2*i)]
   M := genericMatrix (R, 2,i)
   I := minors (M,2)
   betti res I
)
```