

**Aufgaben 5****Aufgabe 5.1**

Zeigen Sie:

$$I_{\Delta^*} = \bigcap_{\sigma \notin \Delta} \mathfrak{m}^\sigma,$$

und

$$\Delta^{**} = \Delta.$$

Finden Sie einen Simplicialkomplex  $\Delta$  mit  $\Delta = \Delta^*$ .**Aufgabe 5.2**Sei  $\Delta$  der Rand des Oktaeders. Berechnen Sie  $I_\Delta, I_{\Delta^*}$ , beide Hilbertreihen, beide freien Auflösungen und interpretieren Sie die Bettizahlen mit Hilfe simplicialer Homologie.**Aufgabe 5.3**Sei  $G$  ein einfacher ungerichteter Graph auf der Kantenmenge  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$  und  $\mathbb{k}[\mathbf{x}] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  der Polynomring in  $n$  Unbestimmten. Das *edge ideal* von  $G$  ist das Monomideal

$$M_G = \langle x_i x_j : \{i, j\} \text{ Kante in } G \rangle \subset \mathbb{k}[\mathbf{x}].$$

Schreiben Sie eine Macaulay2 Funktion die für eine gegebene Zahl  $i$  die Betti-Tabelle des edge ideals des Pfads der Länge  $i$  ausgibt. Berechnen Sie möglichst viele dieser Betti-Tabellen. Für welche Phänomene oder einzelne Einträge der Betti-Tabelle können Sie Beweise finden?