Aufgaben 6

Aufgabe 6.1

Zeigen Sie dass je $d+1$ verschiedene Punkte auf der Momentenkurve M_d affin unabhängig sind.

Aufgabe 6.2

Ein ein purer Simplizialkomplex Δ auf $[n]$ ist *schälbar* falls eine Anordnung $F_1, F_2, \dots, F_s$ der Facetten existiert so dass

- Für alle $2 \le i \le s$ ist $\langle F_i \rangle \cap \langle F_1, \dots, F_{i-1} \rangle$ erzeugt von einer nichtleeren Menge von Facetten von F_i.

Hierbei bezeichnet $\langle X \rangle$ den von X erzeugten Subkomplex von Δ. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass schälbare Komplexe Cohen-Macaulay über jedem Körper sind [Bruns/Herzog, Thm 5.1.3].

a) Sei $R := \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ und $I_1, I_2 \subset R$ homogene Ideale. Zeigen Sie, dass die Folge

$$0 \to R/(I_1 \cap I_2) \xrightarrow{a \mapsto (a,-a)} R/I_1 \oplus R/I_2 \xrightarrow{(a,b) \mapsto (a+b)} R/(I_1 + I_2) \to 0 \tag{1}$$

exakt ist. Aus den sogenannten *depth-Ungleichungen* [Bruns/Herzog, Prop. 1.2.9] folgt, dass falls R/I_1 und R/I_2 CM der Dimension d und $R/(I_1+I_2)$ CM der Dimension $d-1$ sind, dann ist $R/(I_1 \cap I_2)$ CM der Dimension d.

b) Sei Δ schälbar, $\dim(\Delta)+1 = \dim(\Bbbk[\Delta]) = d$ und $F_1, F_2, \dots, F_s$ eine schälende Facettenordnung. Bezeichne mit Δ_j den Subkomplex der ersten j Facetten: $\Delta_j := \langle F_1, \dots, F_j \rangle$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$0 \to \Bbbk[\Delta_j] \to \Bbbk[\Delta_{j-1}] \oplus \Bbbk[F_j] \to \Bbbk[\Delta_{j-1} \cap F_j] \to 0$$

von der Gestalt (1) ist.

c) Folgern Sie per Induktion nach j das Theorem.

Aufgabe 6.3

Finden Sie einen Simplizialkomplex dessen h-Vektor negative Einträge hat.