Monomial and binomial ideals

Thomas Kahle

Aufgaben 7

Aufgabe 7.1

Seien $I \subset \Bbbk[\mathbf{x}]$ ein Binomideal und $M_1, \ldots, M_s$ Monomideale. Zeigen Sie, dass

$$(I + M_1) \cap \ldots \cap (I + M_s) = I + M$$

für ein Monomideal M. Zeigen Sie weiter, dass für jedes Monom x^u gilt

$$x^u \in I + M_1 + \ldots + M_2 \quad \Leftrightarrow \quad x^u \in I + M_i \quad \text{für ein } i.$$

Aufgabe 7.2

Geben Sie eine möglichst genaue Beschreibung der Monoide die die folgenden $\Bbbk$-Algebren fein gradieren:

- $\Bbbk[x, y]/\langle x - y\rangle$
- $\Bbbk[x, y]/\langle y^2, x - 1\rangle$
- $\Bbbk[x, y]/\langle y^2(x - 1)\rangle$
- $\Bbbk[x, y]/\langle y^3, y^2(x - 1), y(x^2 - 1)\rangle$

Aufgabe 7.3

Sei Q das Monoid erzeugt von e_1, e_2 mit den Relationen $3e_1 = e_1, 2e_2 = e_2$. Finden Sie eine $\Bbbk$-Algebra die durch dieses Monoid fein gradiert wird. Zeigen Sie, dass Q eine Untergruppe (d.h. eine Teilmenge die selbst eine Gruppe bildet) enthält, deren Neutralelement nicht das Neutralelement von Q ist.